

De beesten getemd

R. Snel <r.snel@ovc.nl>

Mei 2016

1 Inleiding

We gaan

$$I := \int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx,$$

met $a \neq 0$, berekenen. Om dit te doen, moeten we onderscheid maken tussen de gevallen $D > 0$, $D = 0$ en $D < 0$.

Op de manier van het boek lijken de primitieven in de drie gevallen totaal niet op elkaar. Daarom gaan we op zoek naar een manier om ze zodanig te schrijven dat ze meer op elkaar lijken en zodoende meer inzicht in deze primitieven te verkrijgen.

2 De manier van het boek

2.1 Het geval $D > 0$

Omdat $D > 0$ zijn er twee nulpunten x_+ en x_- . De integraal is dan als volgt te schrijven

$$I = \int \frac{dx + e}{a(x - x_+)(x - x_-)} dx = \frac{1}{a} \int \frac{A}{x - x_+} + \frac{B}{x - x_-} dx.$$

We maken de breuken gelijknamig en tellen ze op

$$I = \int \frac{A(x - x_-) + B(x - x_+)}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{(A + B)x - Ax_- - Bx_+}{ax^2 + bx + c} dx$$

Hieruit volgt het stelsel $A + B = d \wedge Ax_- + Bx_+ = -e$. Substitutie van $B = d - A$ in de tweede vergelijking geeft $Ax_- + (d - A)x_+ = -e$, dus $A(x_+ - x_-) = dx_- + e$ en derhalve $A = \frac{dx_+ + e}{x_+ - x_-}$. Uit $B = d - A$ volgt dan $B = -\frac{dx_- + e}{x_+ - x_-}$. De conclusie is dat

$$I = \frac{1}{a(x_+ - x_-)} \int (dx_+ + e) \frac{1}{x - x_+} - (dx_- + e) \frac{1}{x - x_-} dx$$

en dat we de integraal nu kunnen berekenen

$$I = \frac{(dx_+ + e) \ln|x - x_+| - (dx_- + e) \ln|x - x_-|}{a(x_+ - x_-)} + C.$$

2.2 Het geval $D = 0$

In het geval dat $D = 0$ heeft de parabool één nulpunt. Dit nulpunt noemen we x_0 . De teller kan worden gesplitst in een veelvoud van $x - x_0$ en een constante

$$I = \int \frac{dx + e}{a(x - x_0)^2} dx = \int \frac{d(x - x_0) + dx_0 + e}{a(x - x_0)^2} dx$$

de integraal valt uiteen in twee stukken

$$I = \int \frac{d}{a(x - x_0)} + \frac{dx_0 + e}{a(x - x_0)^2} dx$$

en laat zich gemakkelijk primitiveren

$$I = \frac{d}{a} \ln |x - x_0| - \frac{dx_0 + e}{a(x - x_0)} + C.$$

2.3 Het geval $D < 0$

In dit laatste geval splitsen we de teller in twee stukken; het eerste stuk is een veelvoud van de afgeleide van de noemer en het tweede stuk is een constante

$$I = \int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{\frac{d}{2a}(2ax + b) + e - \frac{bd}{2a}}{ax^2 + bx + c} dx. \quad (1)$$

Merk op dat deze stap werkt voor alle waarden van de discriminant.

Het eerste deel kunnen we nu primitiveren met de substitutistelling en de noemer van het tweede deel gaan we kwadraatafsplitsen.

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2a} \int \frac{1}{y_{\text{top}} + a(x - x_{\text{top}})^2} dx.$$

Nu kunnen we de noemer delen door y_{top} en de factor $\frac{a}{y_{\text{top}}}$ binnen het kwadraat brengen, omdat $D < 0$ is deze factor positief

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2ay_{\text{top}}} \int \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{a}{y_{\text{top}}}}(x - x_{\text{top}}) \right)^2} dx.$$

De afgeleide van de arctangens is nu duidelijk herkenbaar, dus de complete primitieve is

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2a\sqrt{ay_{\text{top}}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{y_{\text{top}}}}(x - x_{\text{top}}) \right) + C.$$

2.4 Overzicht

Samenvattend hebben we nu de volgende formules gevonden

$$I = \begin{cases} \frac{(dx_+ + e) \ln |x - x_+| - (dx_- + e) \ln |x - x_-|}{a(x_+ - x_-)} + C & \text{als } D > 0 \\ \frac{d}{a} \ln |x - x_0| - \frac{dx_0 + e}{a(x - x_0)} + C & \text{als } D = 0 \\ \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2a\sqrt{ay_{\text{top}}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{y_{\text{top}}}} (x - x_{\text{top}}) \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Deze formules zien er op het eerste gezicht totaal verschillend uit. Dit wordt mede veroorzaakt door het feit dat de formules steeds gegeven zijn in termen van andere parameters; de formule van $D > 0$ is gegeven in termen van x_+ , x_- , a , d en e , de formule bij $D = 0$ is gegeven in termen van x_0 , a , d en e en de laatste formule in termen van a , b , c , d , e , x_{top} en y_{top} .

We zien ook dat de primitieve in het geval van $D < 0$ explodeert in de limit $y_{\text{top}} \rightarrow 0$ (ofwel $D \uparrow 0$) terwijl je juist zou willen dat hij gelijk wordt aan de primitieve in het geval van $D = 0$.

Wat wel goed gaat is de limit $D \downarrow 0$ van het resultaat voor $D > 0$. Neem $x_- = x_0$, $x_+ = x_0 + h$ en definieer $f(u) = \frac{1}{a}(du + e) \ln |x - u|$, dan geldt (wegens het herkennen van de definitie van afgeleide van $f(u)$)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(d(x_0 + h) + e) \ln |x - (x_0 + h)| - (dx_0 + e) \ln |x - x_0|}{ah} = f'(x_0) = I|_{D=0}.$$

3 Samenhang zichtbaar maken

3.1 Plan

Het plan is, om alle primitieven te schrijven in termen van a , b , c , d , e en D , in de hoop een zekere samenhang te kunnen zien. Verder verwachten we dat we kunnen aantonen dat

$$\lim_{\sqrt{D} \downarrow 0} I|_{D>0} = \lim_{\sqrt{-D} \downarrow 0} I|_{D<0} = I|_{D=0}.$$

Ten slotte zullen wiskunde D-leerlingen ook nog zien dat de formules voor $D > 0$ en $D < 0$ precies hetzelfde zijn.

3.2 Formules mooi schrijven

We maken gebruik van

$$I = \int \frac{dx + e}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Een hint om deze herleiding te kunnen volgen is vergelijking 1.

Het is dus voldoende om

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$$

te bepalen in termen van a , b , c en D . We schrijven vergelijking 2 met $d = 0$ en $e = 1$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \frac{1}{a(x_+ - x_-)} \ln \left| \frac{x - x_+}{x - x_-} \right| + C & \text{als } D > 0 \\ -\frac{1}{a(x - x_0)} + C & \text{als } D = 0. \\ \frac{1}{\sqrt{ay_{\text{top}}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{y_{\text{top}}}} (x - x_{\text{top}}) \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

Opmerkend dat $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, $x_0 = x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a}$, $y_{\text{top}} = -\frac{D}{4a}$ en $x_+ - x_- = \frac{\sqrt{D}}{a}$ zien we dat

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \ln \left| \frac{2ax + b - \sqrt{D}}{2ax + b + \sqrt{D}} \right| + C & \text{als } D > 0 \\ -\frac{2}{2ax + b} + C & \text{als } D = 0. \\ \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{-D}} \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

In de wiskunde is de volgende functie gedefinieerd¹

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|.$$

In dit licht kunnen we onze conclusie al heel wat mooier opschrijven

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{bd - 2ae}{a} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D > 0 \\ \frac{1}{2ax + b} + C & \text{als } D = 0. \\ \frac{1}{\sqrt{-D}} \arctan \left(-\frac{2ax + b}{\sqrt{-D}} \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

Het minteken in het argument van de arctan ziet er nog een beetje gekunsteld uit. Ook is het raar dat $2ax + b$ in de *noemer* staat in de gevallen $D \geq 0$ en in de *teller* bij $D < 0$.

Hier is nog iets aan te doen. Merk op dat

$$\arctan \left(\frac{a}{b} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi + \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) & \text{als } \frac{a}{b} > 0 \\ 0 & \text{als } a = 0. \\ -\frac{1}{2}\pi + \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) & \text{als } \frac{a}{b} < 0 \end{cases}$$

Als we nu afspreken om in onze integralen voor $D < 0$ rekening houden met een discontinuïteit bij $2ax + b = 0$, dan kunnen we de constante $\pm \frac{1}{2}\pi$ vergeten. Met het vergeten van die constante, introduceren we een discontinuïteit evenredig met $\frac{1}{\sqrt{-D}}$ in de primitieve bij $2ax +$

¹Dit is niet helemaal waar, de echte artanh is gedefinieerd als $\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$ en doet het alleen voor $|x| < 1$. Dankzij de absolutewaardestrepen doet onze artanh het ook voor $|x| > 1$. We zullen later zien dat wiskunde D-leerlingen deze absolutewaardestrepen niet nodig hebben.

$b = 0$; deze discontinuïteit zal in de limiet van $\sqrt{-D} \downarrow 0$ een asymptoot worden. Merk op dat het nemen van de limiet $\sqrt{-D} \downarrow 0$ niet mogelijk is zonder deze discontinuïteit.

Onze primitieven zien er nu als volgt uit

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{bd - 2ae}{a} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D > 0 \\ \frac{1}{2ax + b} + C & \text{als } D = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-D}} \operatorname{arctan} \left(\frac{\sqrt{-D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

Vergelijk dit resultaat eens met vergelijking 2.

3.3 Limieten

Om in te zien dat

$$\lim_{\sqrt{D} \downarrow 0} I|_{D>0} = I|_{D=0},$$

is het voldoende om te laten zien dat

$$\lim_{\sqrt{D} \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2ax + b} \right) = \frac{1}{2ax + b}.$$

De rest van I is immers hetzelfde.

Voor het berekenen van deze limiet gebruiken we weer de methode “de definitie van afgeleide herkennen.” Neem aan dat we een functie f hebben, met als eigenschap dat $f(0) = 0$. We berekenen de volgende limiet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0).$$

De gevraagde limiet kan nu berekend worden door te nemen

$$f(u) = \operatorname{artanh} \left(\frac{u}{2ax + b} \right).$$

De limiet voor $\sqrt{-D} \downarrow 0$ kan op precies dezelfde manier worden berekend.

3.4 Voor leerlingen met wiskunde D

De functies arctan en artanh zijn nauw aan elkaar verwant. Er geldt dat

$$\operatorname{arctan}(x) = i \operatorname{artanh}(-ix).$$

Dit geldt alleen als we de absolutewaardestrepen weglaten in de definitie van artanh , maar dat is geen probleem, omdat we weten dat $\ln(-x) = \ln(x) + \ln(-1) = \ln(x) + i\pi$, dus dat scheelt een constante en maakt niet uit bij primitiveren.

Hiervan gebruikmakend wordt ons lijstje met primitieven nog wat eenvoudiger

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{bd - 2ae}{a} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D \neq 0 \\ \frac{1}{2ax + b} + C & \text{als } D = 0 \end{cases}.$$

4 Conclusie

We hebben laten zien dat

$$I = \begin{cases} \frac{(dx_+ + e) \ln |x - x_+| - (dx_- + e) \ln |x - x_-|}{a(x_+ - x_-)} + C & \text{als } D > 0 \\ \frac{d}{a} \ln |x - x_0| - \frac{dx_0 + e}{a(x - x_0)} + C & \text{als } D = 0 \\ \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{2ae - bd}{2a\sqrt{ay_{\text{top}}}} \arctan \left(\sqrt{\frac{a}{y_{\text{top}}}} (x - x_{\text{top}}) \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

op hetzelfde neerkomt² als

$$I = \frac{d}{2a} \ln |ax^2 + bx + c| + \frac{bd - 2ae}{a} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D}} \operatorname{artanh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D > 0 \\ \frac{1}{2ax + b} + C & \text{als } D = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-D}} \arctan \left(\frac{\sqrt{-D}}{2ax + b} \right) + C & \text{als } D < 0 \end{cases}$$

en dat er niks raars gebeurt in de limiet $D \rightarrow 0$. Leerlingen met wiskunde D kunnen de formule voor $D > 0$ ook gebruiken voor $D < 0$. Mooi hè!

²Op de discontinuïteit bij $2ax + b = 0$ in het geval $D < 0$ na.